

INEGALITATEA LUI POPOVICIU

MIHAI, Marcela Prof. Drd. Colegiul Tehnic „Ghe. Asachi”

Convexitatea este o notiune simplă și naturală care poate fi găsită încă din vremea lui Arhimede în legătură cu faimoasele lui estimări ale numărului π (utilizând poligoanele înscrise și circumscrise unui cerc). Convexitatea are un mare impact în viața noastră de fiecare zi prin numeroasele aplicații în industrie, business, medicină și artă. Unul, dar nu primul, dintre matematicienii care s-au ocupat de studiul convexității a fost J.L.W.V. Jensen. Printre alți s-au numărat și Ch. Hermit, O. Holder, Cebâsev și Stolz. De-a lungul secolului al XX-lea a avut loc o activitate intensă cu rezultate remarcabile din acest punct de vedere, cu aplicații în analiza funcțională, analiza conveză, optimizarea nonliniară. Un rol de largă popularizare a teoriei funcțiilor convexe a avut-o cartea scrisă de G.H.Hardy, J.E.Littlewood și G.Polya. Printre matematicienii români care au avut preocupări în acest domeniu s-a aflat profesorul academician Tiberiu Popoviciu (n. 16 februarie 1906, Arad - d. 29 decembrie 1975, București). Lucrarea de față tratează una din contribuțiile lui și aplicațiile acesteia.

Teorema 1 (Jensen) Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă f este convexă $\square$
 $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}; (\forall)x, y \in I$ (adică f este mijlociu convexă)

Demonstrație „suficiența”: Prin reducere la absurd: $d_{\perp} f$ nu este convexă, atunci $(\exists)[a, b] \subset I$ astfel „necesitatea”: $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \stackrel{f \text{ convexă}}{\leq} \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) = \frac{f(x)+f(y)}{2}, (\forall)x, y \in I.$

încât $G_{f/[a,b]}$ nu se află sub coarda cu capetele $(a, f(a)), (b, f(b))$, adică

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a), x \in [a, b] \text{ verifică}$$

$$\gamma = \sup\{\varphi(x), x \in [a, b]\} > 0$$

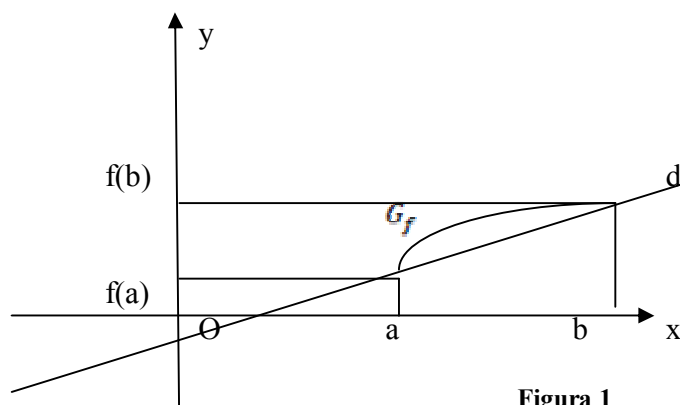


Figura 1

În figura 1, dreapta d are ecuația

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

și faptul că funcția are graficul deasupra dreptei este ilustrat de inegalitatea

$$f(x) - f(a) > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

φ este continuă fiind sumă de funcții continue.

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0.$$

Arăt prin calcul direct că φ este mijlociu convexă:

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \left(\frac{x+y}{2} - a\right) - f(a) \\ &\leq \frac{f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) - f(a) + f(y) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(y-a) - f(a)}{2} \\ &\Leftrightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot \frac{x}{2} - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot \frac{y}{2} + \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot a - f(a) \\ &\leq \frac{f(x) + f(y)}{2} - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot \frac{x}{2} + \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot \frac{a}{2} - \frac{f(a)}{2} - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot \frac{y}{2} \\ &\quad + \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot \frac{a}{2} - \frac{f(a)}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} \end{aligned}$$

„A” din ipoteza suficienței.

Fie $c = \inf\{x \in [a, b] / \varphi(x) = \gamma\} \Rightarrow \varphi(c) = \gamma, c \in (a, b)$

Din definiția lui c pentru $(\forall) h > 0$ avem $c \pm h \in (a, b)$ și $\varphi(c-h) < \varphi(c)$,

$$\varphi(c+h) \leq \varphi(c) \Rightarrow \frac{\varphi(c-h) + \varphi(c+h)}{2} < \frac{\varphi(c) + \varphi(c)}{2} = \varphi(c) \Rightarrow \varphi(c) > \frac{\varphi(c+h) + \varphi(c-h)}{2} \text{ în contradicție cu}$$

faptul că φ este mijlociu convexă $\square$ presupunerea făcută este falsă $\square f$ este convexă.

Teorema 2. (Inegalitatea lui Popoviciu) Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci f este convexă dacă și numai dacă

$$\frac{f(x) + f(y) + f(z)}{3} + f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq \frac{2}{3} \left[f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right) \right]$$

pentru toți $x, y, z \in I$

În variația funcțiilor strict convexe inegalitatea de mai sus este strictă exceptând $x = y = z$.

Demonstrație

Necesitatea: fără a pierde din generalitate putem presupune că $x \leq y \leq z$.

Dacă $y \leq (x+y+z)/3$, atunci

$$(x+y+z)/3 \leq (x+z)/2 \leq z \text{ și } (x+y+z)/3 \leq (y+z)/2 \leq z$$

Care oferă două numere $s, t \in [0, 1]$ a.î.

$$\frac{x+z}{2} = s \cdot \frac{x+y+z}{3} + (1-s) \cdot z$$

$$\frac{y+z}{2} = t \cdot \frac{x+y+z}{3} + (1-t) \cdot z$$

Sucăsând, obținem: $(x+y-2z)(s+t-3/2) = 0$.

Dacă $x+y-2z = 0$, atunci cu necesitate $x = y = z$, și inegalitatea lui Popoviciu este demonstrată.

Dacă $s+t = 3/2$ avem de sumat următoarele trei inegalități:

$$f\left(\frac{x+z}{2}\right) \leq sf\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + (1-s)f(z)$$

$$f\left(\frac{y+z}{2}\right) \leq tf\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + (1-t)f(z)$$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y)$$

și apoi să multiplicăm ambii termeni cu $2/3$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \left[f\left(\frac{x+z}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{x+y}{2}\right) \right] \\ \leq \frac{2}{3}(s+t)f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + \frac{2}{3}(1-s+1-t)f(z) + \frac{1}{3}f(x) + \frac{1}{3}f(y) \\ = \frac{2}{3}(s+t)f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + \frac{4}{3}f(z) - \frac{2}{3}(s+t)f(z) + \frac{1}{3}f(x) + \frac{1}{3}f(y) \\ = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + \frac{2}{3}\left(2 - \frac{3}{2}\right)f(z) + \frac{1}{3}f(x) + \frac{1}{3}f(y) \\ = f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}f(z) + \frac{1}{3}f(x) + \frac{1}{3}f(y) \\ = f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + \frac{f(x) + f(y) + f(z)}{3}. \end{aligned}$$

Cazul când $(x+y+z)/3 \leq y$ poate fi tratat similar.

Suficiența: Inegalitatea lui Popoviciu (aplicată pentru $y = z$) oferă următoarea substituție pentru condiția convexității mijlocii:

$$\frac{1}{4}f(x) + \frac{3}{4}f\left(\frac{x+2y}{3}\right) \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

pentru toți $x, y \in I$.

Utilizând această, observație, demonstrația urmează textual argumentul Teoremei 1.

Exercițiu Să presupunem că x_1, x_2, x_3 sunt numere pozitive în toate sumele.

Demonstrați că:

$$\begin{aligned} \prod_{i < j} (x_i + x_j)^2 &\geq 64 x_1 x_2 x_3 (x_1 x_2 x_3)^3 \\ x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 + 3x_1^2 x_2^2 x_3^2 &\geq 2(x_1^3 x_2^3 + x_2^3 x_3^3 + x_3^3 x_1^3) \end{aligned}$$

(i) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log x \Rightarrow f$ este strict concavă $\Rightarrow$

$$\frac{f(x) + f(y) + f(z)}{3} + f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) < \frac{2}{3} \left[f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{x+z}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) \right]$$

Dar $x = x_1, y = x_2, z = x_3$ deci

$$\frac{\log x_1 + \log x_2 + \log x_3}{3} + \log \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} < \frac{2}{3} \left[\log \frac{x_1 + x_2}{2} + \log \frac{x_1 + x_3}{2} + \log \frac{x_2 + x_3}{2} \right],$$

□i făcând calcule în termenul drept al inegalității □ii obținem:

$$\begin{aligned} \frac{\log x_1 + \log x_2 + \log x_3}{3} + \log \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ < \frac{2}{3} [\log(x_1 + x_2) + \log(x_1 + x_3) + \log(x_2 + x_3)] - 2 \log 2 \end{aligned}$$

rezultă

$$\frac{\log x_1 + \log x_2 + \log x_3}{3} + \log \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} + \log 4 < \frac{2}{3} \log(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3) \quad \text{deci}$$

$$\log(x_1 x_2 x_3) + 3 \log \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} + 3 \log 4 < \log[(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)]^2 \quad \text{obținem}$$

$$\log(x_1 x_2 x_3) + \log \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \right)^3 + \log 4^3 < \log[(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)]^2 \quad \text{rezultă}$$

$$\log \left[x_1 x_2 x_3 \cdot \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \right)^3 \cdot 64 \right] < \log[(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)]^2 \quad \text{și deci}$$

$$x_1 x_2 x_3 \cdot \frac{(x_1 + x_2 + x_3)^3}{27} \cdot 64 < (x_1 + x_2)^2 (x_1 + x_3)^2 (x_2 + x_3)^2$$

după care amplificăm inegalitatea cu 27 și obținem inegalitatea dorită. (ii) Fie

$f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty), f(x) = e^x$. Conform inegalității lui Popoviciu aplicată funcției f obținem

$$\frac{e^{t_1} + e^{t_2} + e^{t_3}}{3} + e^{\frac{t_1 + t_2 + t_3}{3}} \geq \frac{2}{3} \left[e^{\frac{t_1 + t_2}{2}} + e^{\frac{t_1 + t_3}{2}} + e^{\frac{t_2 + t_3}{2}} \right].$$

Această inegalitate o amplificăm cu 3 astfel că:

$$e^{t_1} + e^{t_2} + e^{t_3} + 3 e^{\frac{t_1}{3}} e^{\frac{t_2}{3}} e^{\frac{t_3}{3}} \geq 2 \left(e^{\frac{t_1}{2}} e^{\frac{t_2}{2}} + e^{\frac{t_1}{2}} e^{\frac{t_3}{2}} + e^{\frac{t_2}{2}} e^{\frac{t_3}{2}} \right).$$

Notând $e^{t_1} = x_1^6, e^{t_2} = x_2^6, e^{t_3} = x_3^6$ obținem

$$x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 + 3x_1^2 x_2^2 x_3^2 \geq 2(x_1^3 x_2^3 + x_2^3 x_3^3 + x_3^3 x_1^3).$$

Bibliografie

- [1]. **Constantin P. Niculescu, Lars-Erik Persson**, Convex functions and their applications, A contemporary approach, september 27, 2005
- [2]. **Mică Enciclopedie Matematică**, după lucrarea în limba germană-Kleine Enzyklopadie Der Mathematik, 1971, cu completările din limba engleză Mathematics at a Glance, 1975
- [3]. **Ion Colojoară**, Lecții de Analiză Matematică, Universitatea din București, Facultatea de Matematică, 1979
- [4]. **Carol Neuman, Edmond Nicolau, Anghel Schor**, Teoria sumară a dezvoltării Științei, Editura politică, București, 1983.